Tijdschrift voor Economie en Management
Vol. XXXIX, 4, 1994

Het deterministisch assortimentsprobleem

door W. GOCHET* en M. VANDEBROEK*

I. INLEIDING

Het nut van een produkt hangt vaak af van een beperkt aantal kritieke attributen. Ideale waarden voor deze attributen bestaan meestal niet omdat ze afhangen van gebruiker tot gebruiker. Zo hebben klanten bij de keuze van een wagen verschillende voorkeuren i.v.m. de attributen *vermogen van de motor, kofferinhoud en remsysteem*. Kopers van ijskasten verschillen m.b.t. het attribuut *inhoud*, kopers van schroeven m.b.t. het *aantal schroeven in de verpakking* en kopers van kledingstukken zoeken naar de *juiste maat*.

De combinatie van waarden die de verschillende attributen van een produkt hebben, wordt verder aangeduid als de *maat* van het produkt. Indien het produkt gekenmerkt wordt door één attribuut, dan is de maat de waarde van dit attribuut en is de maat ééndimensioneel. Indien de maat een combinatie van waarden van meerdere attributen betreft, dan is de maat meerdimensioneel. Afhankelijk van de omstandigheden en het tijdstip van verwerving kan eenzelfde gebruiker behoefte hebben aan verschillende maten van een produkt. Indien een bedrijf bijvoorbeeld dozen gebruikt als verpakkingsmateriaal, dan heeft men op dag 1 dozen nodig met inhoud x_1 of, meer specifiek, dozen met afmetingen $l_1 x\, b_1 x\, h_1$, terwijl op dag 2 dozen nodig zijn met inhoud x_2 of afmetingen $l_2 x\, b_2 x\, h_2$. Voor de gebruiker van de dozen is het kritieke attribuut de inhoud van de dozen en deze gewenste inhoud kan variëren.

De begrippen *gebruiker* en *attribuut* moeten in de ruimste betekenis geïnterpreteerd worden. De gebruiker kan een gewone consu-

* Departement Toegepaste Economische Wetenschappen, K.U.Leuven.

ment zijn maar kan ook het bedrijf zijn dat bijvoorbeeld metalen platen produceert met verschillende *lengte*, *breedte* en *dikte* (= attributen) en deze platen verder verwerkt in een produktieproces. In dit laatste geval is hetzelfde bedrijf zowel producent als gebruiker.

Geconfrontreerd met de vraag naar een groot aantal verschillende maten van een produkt, zal een producent niet noodzakelijk elk van deze maten aanbieden maar zich beperken tot een aantal *standaardmaten*. De redenen hiervoor liggen voor de hand: het vermijden van te hoge produktiekosten, omsteltijden, ontwerpkosten, voorraadkosten, een te logge voorraadadministratie, enz. Een gevolg hiervan is dat de gebruiker beperkt wordt in zijn keuze en wellicht niet zijn ideale maat in het aanbod terugvindt. Hij kan hierop reageren door het produkt af te wijzen of door zich aan te passen en zijn keuze te maken uit de aangeboden standaardmaten. In dit laatste geval zal in de hieronder beschreven modellen rekening gehouden worden met een *substitutiekost*, die zowel geldt voor de producent als voor de gebruiker maar verschillend kan zijn voor beiden. Zo zal voor de producent de substitutiekost vaak bestaan uit een verlies aan goodwill; voor de gebruiker neemt deze kost diverse vormen aan: materiaalverlies omdat een te grote standaardmaat moet worden versneden tot de gewenste afmeting(en), ongemakken bij het niet perfekt passen van een kledingstuk, enz.

Meestal zal de producent beslissen welke standaardmaten worden aangeboden, soms echter kiest de gebruiker de standaardmaten. Onderstel bijvoorbeeld dat in het hoger aangehaalde voorbeeld van de verpakkingsdozen de gebruiker tientallen of honderden verschillende afmetingen van dozen nodig heeft. In plaats van dit groot aantal verschillende afmetingen aan te kopen, wordt een beperkt aantal standaardmaten in grote hoeveelheden besteld en wordt eventueel een iets grotere doos gebruikt indien de gepaste maat niet voorhanden is. Dit brengt overtollige kosten mee (overbodig karton, te grote dozen) maar deze extra-kosten wegen wellicht niet op tegen de voordelen als gevolg van verminderde voorraadkosten en vereenvoudiging van voorraadverhandeling en administratie, eventueel kortingen bij de aankoop van grote hoeveelheden met dezelfde afmetingen, enz.

Het *assortimentsprobleem* behandelt de keuze van de standaardmaten door de producent of de gebruiker waarbij (verwachte) kosten worden geminimaliseerd of (verwachte) opbrengsten worden gemaximaliseerd. Deze keuze impliceert uiteraard ook het bepalen van het *aantal* standaardmaten die zullen worden aangeboden of gebruikt.

Het probleem kan deterministisch of stochastisch worden opgevat: in het eerste geval wordt de vraag naar de verschillende (ideale) maten gekend verondersteld terwijl in het stochastische geval hiervoor slechts een kansverdeling beschikbaar is. In beide gevallen kunnen de ideale maten continu of discreet in een interval gespreid liggen. Bovendien kan het probleem als een éénperiode of een meerperioden probleem worden gesteld. In het éénperiode probleem wordt een assortiment van standaardmaten gekozen in het licht van een eenmalige gekende of stochastische vraag. Bij een stochastische vraag is er het bijkomende probleem dat er eventueel niet gebruikte produkten zijn die extra kosten opleveren. Bij het meerperioden probleem kan dit worden opgevangen door voorraadvorming expliciet in het model op te nemen.

Uit bovenstaande beschouwingen en de voorbeelden hoger aangehaald, zal duidelijk zijn dat één allesomvattend model voor het assortimentsprobleem niet bestaat. In elke concrete situatie zal moeten onderzocht worden welke modelformulering het meest geschikt is. Hieronder zal vooral het deterministische één- en tweedimensioneel probleem over één periode aan bod komen. Dit omvat concrete problemen waarbij bijvoorbeeld een producent via een orderboek de bestellingen kent of waarbij een gebruiker de door hem vereiste maten vrij nauwkeurig kan inschatten.

Tenslotte wordt opgemerkt dat in een aantal praktische situaties het assortimentsprobleem niet los kan behandeld worden van het beter gekende versnijdingsprobleem. Bij de keuze van glazen, metalen of kartonnen standaardplaten is het namelijk vaak mogelijk om een standaardplaat niet enkel te gebruiken voor één (kleinere) gevraagde dimensie maar ook een standaardplaat te versnijden tot meerdere kleinere gevraagde afmetingen. Het is duidelijk dat in dergelijke gevallen de keuze van het assortiment standaardplaten afhankelijk is van de mogelijke versnijdingspatronen. Het al complexe probleem van de keuze van de standaardmaten wordt hierdoor nog aanzienlijk ingewikkelder en er zal in deze bijdrage verder geen aandacht aan besteed worden.

II. HET DETERMINISTISCH EENDIMENSIONEEL PROBLEEM

A. *Discrete vraag*

De meest eenvoudige vorm van het assortimentsprobleem wordt bekomen indien slechts één attribuut van het produkt van belang is. Stel dat de maten $x_1, x_2, \ldots, x_N$ nodig zijn met vraag $g_1, g_2, \ldots, g_N$. Er wordt verondersteld dat het attribuut minstens ordinaal meetbaar is zodat

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_N$$

waarbij < staat voor de ordinale relatie tussen de maten. De relatie $x_{i-1} < x_i$ kan betekenen dat

- x_i een grotere lengte heeft dan x_{i-1}
- x_i meer eenheden bevat dan x_{i-1}
- x_i van betere kwaliteit is dan x_{i-1}...

Voorlopig wordt verondersteld dat het *aantal* te selecteren standaardmaten n gekend is en de waarden van de standaardmaten $s_1, s_2, \ldots, s_n$ niet gekend zijn. Indien bijvoorbeeld enkel substitutiekosten in rekening worden gebracht voor de bepaling van de s_i, $i = 1 \ldots n$ dan is een eerste modelformulering mogelijk via geheeltallige lineaire programmering. Volgende notatie wordt hierbij gebruikt: $\varphi(x_i, s_j)$ = de substitutiekost indien één gevraagde eenheid van maat x_i door standaardmaat s_j wordt voldaan. Deze kost kan zeer groot gesteld worden indien standaardmaat s_j niet kan gebruikt worden voor de vraag naar maat x_i $(i = 1 \ldots N, j = 1 \ldots n)$.

Indien de veronderstelling wordt gemaakt dat de keuze van de n standaardmaten beperkt wordt tot een keuze uit de gevraagde maten, dan volstaan volgende variabelen:

β_j: binaire variabelen:
= 1 indien x_j opgenomen wordt als standaardmaat
= 0 indien niet

α_{ij}: binaire variabelen:
= 1 indien de vraag g_i voldaan wordt via maat x_j
= 0 indien niet

Het geheeltallig lineair programmeringsprobleem ziet er dan uit als volgt:

$$\min_{\alpha_{ij},\beta_j} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\varphi(x_i,x_j)\; g_i\;\alpha_{ij} \tag{1}$$

$$\text{met} \quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}=1 \qquad i=1,2\ldots N \tag{2}$$

$$\alpha_{ij}\leq\beta_j \qquad i,j=1,2\ldots N \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\beta_j\leq n \tag{4}$$

$$\alpha_{ij},\beta_j \;\; \text{binair} \tag{5}$$

De doelfunctie (1) minimaliseert de totale substitutiekost waarbij $\varphi(x_i,x_j)g_i$ de kost is verbonden aan het voldoen van de vraag naar maat x_i via maat x_j. De gelijkheden in (2) drukken uit dat aan elke vraag moet voldaan worden en de ongelijkheden in (3) geven aan dat de vraag naar maat x_i slechts via maat x_j kan voldaan worden indien x_j als standaardmaat wordt gekozen. Tenslotte drukt ongelijkheid (4) uit dat maximaal n verschillende standaardmaten kunnen geselecteerd worden.

Merk op dat bij deze formulering de ordinale relatie tussen de maten niet nodig is. Bij verdere formuleringen zal deze onderstelling echter wel nodig zijn.

Het bovenstaand model is het *p-mediaan probleem* dat in de literatuur terug te vinden is in een hele waaier van toepassingen. De formulering is de zogenaamde sterke vorm van het p-mediaan probleem. De beperkingen (3) kunnen vervangen worden door de equivalente beperkingen

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\leq M\;\beta_j, \qquad j=1\ldots N \tag{6}$$

waarin M een groot getal is. De formulering waarin de N^2 -ongelijkheden uit (3) worden vervangen door de N ongelijkheden uit (6) wordt de zwakke vorm van het p-mediaan probleem genoemd.

Welke vorm ook gebruikt wordt, het oplossen van geheeltallige lineaire optimizatieproblemen is tijdrovend en wordt zelfs onmogelijk indien het aantal binaire variabelen te groot is.

Door de binaire beperkingen (5) te vervangen door $0 \leq \alpha_{ij} \leq 1$ en $0 \leq \beta_j \leq 1$ wordt een zuiver lineair programmeringsprobleem bekomen, de LP-relaxatie genoemd. Het is gebleken uit experimenten dat de oplossing van de LP-relaxatie van de sterke vorm van het p-mediaan probleem vaak automatisch binair is, vooral bij toepassingen van het assortimentsprobleem. De LP-relaxatie van de zwakke vorm zal vaak fractionele waarden voor de variabelen opleveren en is dus minder geschikt.

Welke vorm ook gebruikt wordt, bovenstaande modellen hebben als nadeel dat het aantal binaire variabelen kwadratisch is in N, nl $N^2 + N$, en dus snel toeneemt met de waarde van N.

Voorbeeld: stel dat volgende informatie over de vraag gegeven is waarbij het attribuut de lengte van de staven voorstelt:

x_i	2.59	3.00	3.17	4.04	5.33	5.58	6.07	6.51	8.95	9.80
g_i	41	84	28	45	47	46	75	15	23	26

De substitutiekost is van de vorm

$$\begin{aligned} \varphi(x_i, x_j) &= x_j - x_i && \text{voor} \quad j \geq i \\ &= +\infty && \text{voor} \quad j < i \end{aligned}$$

d.w.z. dat een kleinere lengte slechts uit een grotere lengte kan bekomen worden en dat de substitutiekost het verschil in lengte is. De oneindig grote substitutiekosten kunnen in het model best ingebracht worden door de corresponderende variabelen α_{ij} uit het model weg te laten. De LP-relaxatie van de sterke vorm geeft voor elke n van 1 tot 10 een oplossing die binair is. De resultaten worden weergegeven in Tabel 1.

TABEL 1

LP-relaxatie van de sterke vorm

n	minimale substitutiekost	optimaal assortiment
1	2066.81	9.80
2	701.63	6.07 ; 9.80
3	257.93	3.17 ; 6.07 ; 9.80
4	166.58	3.17 ; 4.94 ; 6.07 ; 9.80
5	104.66	3.17 ; 4.04 ; 5.58 ; 6.51 ; 9.80
6	71.66	3.17 ; 4.04 ; 5.58 ; 6.07 ; 6.51 ; 9.80
7	47.88	2.59 ; 3.17 ; 4.04 ; 5.58 ; 6.07 ; 6.51 ; 9.80
8	26.03	2.59 ; 3.17 ; 4.04 ; 5.58 ; 6.07 ; 6.51 ; 8.95 ; 9.80
9	11.75	2.59 ; 3.00 ; 3.17 ; 4.04 ; 5.58 ; 6.07 ; 6.51 ; 8.95 ; 9.80
10	0	2.59 ; 3.00 ; 3.17 ; 4.04 ; 5.33 ; 5.58 ; 6.07 ; 6.51 ; 8.95 ; 9.80

Indien de LP-relaxatie van de zwakke vorm wordt opgelost met M = 10 en bijvoorbeeld $n = 3$ wordt als oplossing bekomen:

alle $\alpha_{ij} = 0$ behalve $\alpha_{ii} = 1, i = 1...\ 10$ en $\beta_j = 0.1, j=1...10$

Het gebruik van een softwarepakket voor geheeltallige lineaire programmatie, *LINDO* in dit geval, heeft reeds 343 vertakkingen nodig bij de vertak- en begrensmethode voor het oplossen van de zwakke modellering. De zwakke vorm is daarom voor iets grotere problemen totaal onbruikbaar.

Indien de substitutiekost $\varphi\ (x_i,x_j)$ nader wordt gespecifieerd, komen eventueel meer efficiënte oplossingsprocedures in aanmerking. Een veel voorkomend geval is dat waarbij, als $s_{j-1} < x_i \leq s_j$, de vraag x_i voldaan wordt via s_j (de onmiddelijke *grotere* maat, *betere* kwaliteit, enz.) met substitutiekost $\varphi\ (x_i,s_j)$. In dit geval is een formulering via dynamische programmering zeer efficiënt.

Stel $k\ (x_i,x_j) = \sum_{l=i}^{j} \varphi\ (x_l,x_j) g_l$ voor $i \leq j$, d.w.z. dat $k(x_i,x_j)$ de substitutiekost is voor het voldoen van de maten $x_i, x_{i+1},...x_j$ via standaardmaat x_j. Noteer met $\Phi_z(x_i)$ de minimale substitutiekost voor het voldoen van de vraag naar de maten $x_i,x_{i+1}...x_N$ indien hiervoor z standaardmaten kunnen gebruikt worden.

Er geldt voor elke i= 1...N en $z = 2,3...n$:

$$\Phi_z(x_i) = \min_{x_j \in \Omega(x_i)} \{k(x_i, x_j) + \Phi_{z-1}(x_{j+1})\}$$

waarbij $\Omega(x_i) = \{x_i, x_{i+1}, \dots x_N\}$ en $\Omega_z(x_{N+1}) = 0$.

Indien maar één standaardmaat mag gekozen worden dan moet dit noodzakelijkerwijs x_n zijn zodat voor $z = 1$ eenvoudig geldt dat:

$$\Phi_1(x_i) = k(x_i, x_N) \qquad \text{voor elke } x_i. \tag{8}$$

Vervolgens kan (7) gebruikt worden om $\Phi_z(x_i)$ te berekenen voor $z = 2,3...n$. De minimale kost om aan de volledige vraag te voldoen m.b.v. n standaardmaten wordt dan gegeven door $\Phi_n(x_1)$. Bemerk dat op deze manier zeer snel de minimale substitutiekost kan berekend worden voor verschillende waarden van n. Het is dan eenvoudig eventuele andere kosten, die veelal afhankelijk zijn van n, toe te voegen aan $\Phi_n(x_1)$ om zo de optimale waarde voor n te bepalen.

Indien n niet a priori wordt vastgelegd en elke bijkomende standaardmaat een vaste kost c met zich mee brengt, dan is een efficiëntere formulering mogelijk. Stel $\Phi(x_i)$ de minimale substitutie- en vaste kost voor het voldoen van de vraag naar de maten $x_i, x_{i+1}...x_N$. Dan geldt voor elke $i = 1,2...,N - 1$:

$$\Phi(x_i) = \min_{x_j \in \Omega(x_i)} \{c + k(x_i, x_j) + \Phi(x_{j+1})\} \tag{9}$$

met $\Phi(x_{N+1}) = 0$ terwijl voor $i = N$ geldt

$$\Phi(x_N) = c + k(x_N, x_N). \tag{10}$$

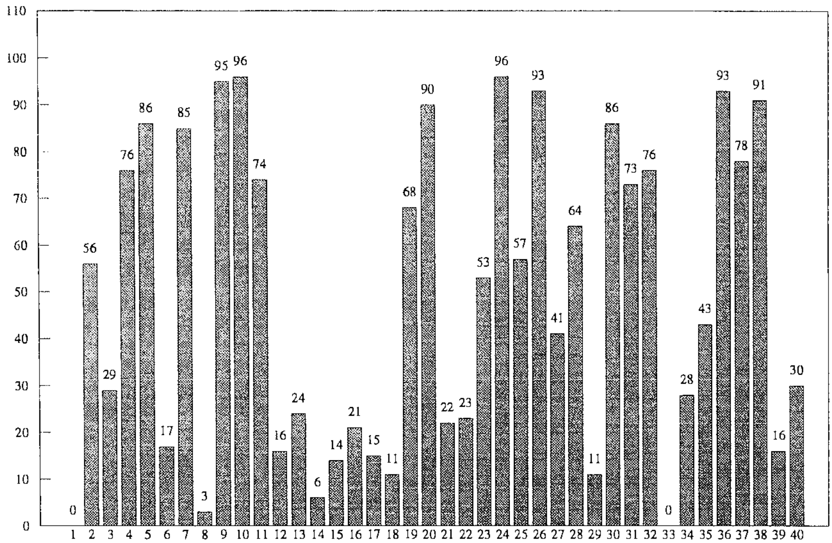
Alle $\Phi(x_i)$ kunnen vervolgens recursief berekend worden via $i=N-1,N-2...2,1$.

De eerste toepassingen van dynamische programmering voor het deterministisch eendimensioneel probleem gaan ver terug, zie bijvoorbeeld Sadowski (1959), Frank (1965) en Wolfson (1965).

Voorbeeld: De vraag naar de afmetingen $(x_1,x_2...x_{40}) = (1,2...40)$ wordt lukraak gegenereerd tussen 0 en 100. Deze vraag wordt weergegeven in Figuur 1.

FIGUUR 1

Vraag naar de maten 1...40



Tabel 2 geeft de resultaten voor verschillende waarden van n en de 2 volgende substitutiekostfuncties:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_i, x_j) &= x_j - x_i && \text{voor } j \geq i \\ &= +\infty && \text{voor } j < i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_i, x_j) &= (x_j - x_i)^2 && \text{voor } j \geq i \\ &= +\infty && \text{voor } j < i \end{aligned}$$

De resultaten werden bekomen via een pascal-programma dat in quasi geen tijd de oplossing berekent. In tegenstelling tot de p -mediaan formulering kunnen met deze benadering grote problemen opgelost worden. Zoals hoger aangegeven werd, is er wel een beperking op de aard van de substitutiekost.

TABEL 2

Optimale standaarmaten voor verschillende n-waarden bekomen via dynamisch programmering

n	kost(φ_1)	assortiment(φ_1)
3	10017	11 ; 28 ; 40
5	5661	11 ; 20 ; 26 ; 32 ; 40
8	2945	5 ; 11 ; 20 ; 24 ; 28 ; 32 ; 37 ; 40
10	2221	5 ; 7 ; 10 ; 13 ; 20 ; 24 ; 28 ; 32 ; 37 ; 40
15	1085	3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 16 ; 20 ; 24 ; 28 ; 30 ; 32 ; 36 ; 38 ; 40
20	574	2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 13 ; 16 ; 19 ; 20 ; 23 ; 24 ; 26 ; 28 ; 30 ; 32 ; 36 ; 38 ; 40
n	kost(φ_2)	assortiment(φ_2)
3	76799	11 ; 28 ; 40
5	26731	7 ; 13 ; 24 ; 32 ; 40
8	8559	5 ; 10 ; 13 ; 20 ; 26 ; 32 ; 37 ; 40
10	4556	4 ; 7 ; 11 ; 16 ; 20 ; 24 ; 28 ; 32 ; 37 ; 40
15	1585	3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 13 ; 17 ; 20 ; 24 ; 26 ; 28 ; 30 ; 32 ; 36 ; 38 ; 40
20	649	2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 16 ; 19 ; 20 ; 22 ; 24 ; 26 ; 28 ; 30 ; 32 ; 35 ; 36 ; 38 ; 40

B. *Continue vraag*

De discrete vraag uit vorige paragraaf wordt hier vervangen door een continue vraag tussen twee grenzen x_l en x_u. Een functie $f(x)$ met $f(x) \geq 0$ en $\int_{x_l}^{x_u} f(x)dx = 1$ wordt ondersteld gekend te zijn. De proportie van de totale vraag gelegen tussen afmetingen x_a en x_b met $x_b > x_a$ is dan gelijk aan $\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$. Deze continue vraag heeft slechts zin indien het attribuut kan gemeten worden op een intervalschaal.

Analoog als in het geval van de discrete vraag wordt ook hier gezocht naar een aantal standaardmaten $s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n$ zodanig dat de kosten geminimaliseerd worden (eventueel opbrengsten gemaximaliseerd). Indien de volledige vraag moet voldaan worden, moet $s_n = x_u$. Dit houdt in dat een aantal welgekende functies zoals de normale, gamma en lognormale dichtheidsfuncties niet direkt bruikbaar zijn voor $f(x)$ vermits ze geen eindige bovengrens hebben. Een nuttige verdeling is bijvoorbeeld de beta-verdeling die veel verschillende vormen tussen willekeurige grenzen x_l en x_u kan aannemen naargelang de keuze van de parameters.

Hoewel meer uitvoerige modellen kunnen beschouwd worden, zal hier enkel de substitutiekost geminimaliseerd worden. Veronderstel dat een vraag naar maat x met $s_{i-1} < x \leq s_i$ voldaan wordt door s_i met een substitutiekost van de volgende vorm:

$$\varphi(x, s_i) = \alpha(s_i - x)^\delta$$

De gemiddelde substitutiekost per gevraagde eenheid is dan

$$GSK = \sum_{i=1}^{n} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \alpha \, (s_i - x)^{\delta} \, f(x) dx \tag{11}$$

waarin $s_0 = x_l$ en $s_n = x_u$. De standaardmaten $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ moeten zodanig gekozen worden dat *GSK* minimaal is. Wiskundig leidt dit tot een continu optimizatieprobleem van de vorm

$$\min_{s_1, s_2 \ldots s_n} \quad \sum_{i=1}^{n} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \alpha \, (s_i - x)^{\delta} \, f(x) \, dx \tag{12}$$

$$\text{met} \quad s_n = x_u \tag{13}$$

$$s_{i-1} \leq s_i \tag{14}$$

Een mogelijke benadering om dit probleem op te lossen bestaat erin de beperkingen (14) te negeren en de afgeleiden van (12) m.b.t. de variabelen $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ gelijk te stellen aan nul. Dit leidt tot een stelsel van n-1 (niet-lineaire) vergelijkingen met n-1 onbekenden:

$$\frac{\partial \, GSK}{\partial \, s_i} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \alpha \, \delta \, (s_i - x)^{\delta - 1} \, f(x) \, dx \; - \; \alpha (s_{i+1} - s_i)^{\delta} \, f(s_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n - 1 \tag{15}$$

Merk op dat α wegvalt uit dit stelsel. Indien vereenvoudigend wordt verondersteld dat $\delta = 1$ (lineaire substitutiekost) dan herleidt (15) zich tot

$$F(s_i) - F(s_{i-1}) - (s_{i+1} - s_i) f(s_i) = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n - 1 \tag{16}$$

waarin $F(s_i) = \int_{x_l}^{s_i} f(x) \, dx$.

Het oplossen van stelsel (15) of (16) via iteratieve methoden kan twee moeilijkheden opleveren:

- er is niet voldaan aan beperkingen (14)
- de iteratieve methode convergeert niet of convergeert naar een lokaal minimum of zadelpunt van de functie (12)

Beide mogelijkheden worden via een aantal voorbeelden onderzocht en hieronder gerapporteerd.

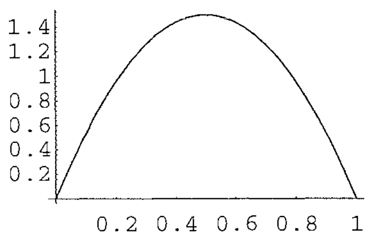
Voorbeeld :

Beschouw een beta-verdeling over het interval (0,1), gekarakteriseerd door 2 parameters a en b. Voor alle resultaten hieronder werd $\alpha = 1$ verondersteld en werd gebruik gemaakt van het software pakket *Mathematica* om het stelsel van niet-lineaire vergelijkingen op te lossen. Nergens traden convergentieproblemen op of problemen met lokale minima of zadelpunten.

1. Symmetrische beta-verdeling
   Bijvoorbeeld (a,b) = (2,2), zie Figuur 2.

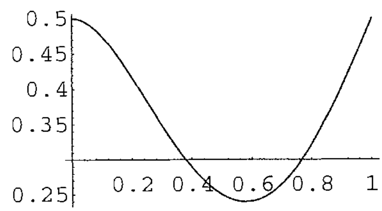
FIGUUR 2

Beta(2,2)-dichtheid



FIGUUR 3

GSK

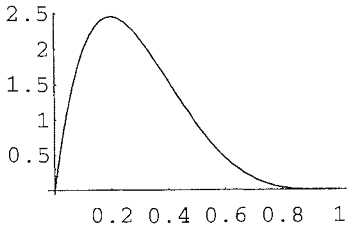


Voor het geval $n = 2$ moet enkel s_1 bepaald worden daar $s_2 = x_u = 1$. Figuur 3 geeft de gemiddelde substitutiekost *GSK* in functie van s_1 voor $n = 2$. Hoewel de functie niet convex is, zijn er toch niet echt problemen te verwachten bij het berekenen van het (globaal) minimum van *GSK*. In Tabel 3 worden de resultaten gegeven voor $n = 2$ en $n = 5$.

2. Rechts-scheve beta-verdeling
   Bijvoorbeeld (a,b) = (2,5), zie Figuur 4. Figuur 5 geeft ook hier de gemiddelde substitutiekost *GSK* in functie van s_1 voor $n = 2$. Ook hiervoor zijn de optimale standaardmaten weergegeven in Tabel 3.

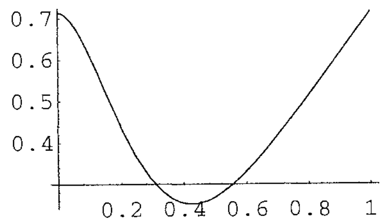
FIGUUR 4

Beta(2,5)-dichtheid



FIGUUR 5

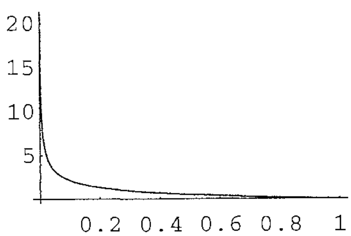
GSK



3. Extreem rechts-scheve beta-verdeling
   Bijvoorbeeld $(a,b) = (\frac{1}{2},2)$, zie Figuur 6 voor de dichtheidsfunctie, Figuur 7 voor *GSK* in functie van s_1 voor $n = 2$ en Tabel 3 voor de resultaten.

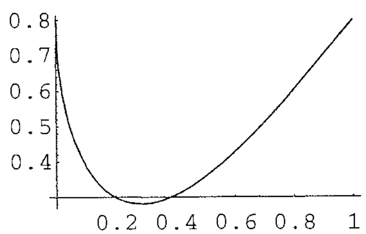
FIGUUR 6

beta(½,2)-dichtheid



FIGUUR 7

GSK



TABEL 3

Beta-verdelingen

(a,b)	n	GSK	assortiment
(2,2)	2	0.240	0.578 ; 1
	5	0.094	0.297 ; 0.467 ; 0.626 ; 0.793 ; 1
(2,5)	2	0.252	0.425 ; 1
	5	0.082	0.182 ; 0.305 ; 0.441 ; 0.622 ; 1
$(\frac{1}{2},2)$	2	0.282	0.283 ; 1
	5	0.087	0.063 ; 0.195 ; 0.379 ; 0.626 ; 1

Indien toch een verdeling $f(x)$ gebruikt wordt met $x_u = +\infty$ dan zijn twee benaderingen mogelijk:

- men stelt s_n gelijk aan een *redelijke* eindige waarde en verwaarloost de vraag $x > s_n$. In het geval van een normale verdeling voor x met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ zou dit $\mu + 3\sigma$ kunnen zijn,
- naast substitutiekosten wordt een kost $q(x)$ in rekening gebracht voor het niet voldoen van de vraag $x > s_n$. In dat geval wordt ook s_n een variabele die moet bepaald worden door het model.

De eerste benadering heeft het nadeel dat de waarde voor s_n vrij arbitrair moet worden vastgelegd terwijl alle andere standaardmaten die bepaald worden via optimizatie zullen afhangen van de gekozen s_n. Indien de kost $q(x)$ kan bepaald worden, lijkt de tweede benadering te verkiezen. De te minimaliseren functie (11) wordt dan vervangen door

$$GSK = \sum_{i=1}^{n} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \alpha\ (s_i - x)^{\delta}\ f(x)\ dx + \int_{s_n}^{+\infty} q(x)\ f(x)\ dx \quad (17)$$

Als niet-linear stelsel wordt dan bekomen: (18)

voor $i = 1,2,...n$-1: de vergelijkingen (15) (19)

$$\text{voor } i{=}n\text{:} \int_{s_{n-1}}^{s_n} \alpha\ \delta\ (s_n - x)^{\delta-1}\ f(x)\ dx \quad - \quad q(x)\ f(s_n) = 0 \quad (20)$$

Voor de lineaire substitutiekost wordt dit: (21)

voor $i = 1,2,...n$-1: de vergelijkingen (16) (22)

voor $i = n$: $\alpha\ [F(s_n) - F(s_{n-1})] - q(s_n)\ f(s_n) = 0$ (23)

Voorbeeld:
Als voorbeeld van een verdeling met onbegrensde x_u wordt voor $f(x)$ de normale dichtheid gebruikt met $\mu = 10$ en $\sigma = 2$.
Neem volgende waarden voor de parameters: $\alpha = 1$, $\delta = 1$ en $q(x) = q$, een vaste kost per eenheid ingeval niet voldaan wordt aan de vraag. Vergelijkingen (16) en (23) geven nu de nodige optimaliteitsvoorwaarden. Zowel het *GINO*-pakket als *Mathematica* werden gebruikt om deze vergelijkingen op te lossen. *GINO* had voor geen enkel voorbeeld convergentieproblemen indien als startwaarde voor elke s_i de verwachte waarde van X werd gebruikt. Bij het gebruik van *Mathe-*

matica daarentegen divergeerden de waarden voor s_i in een beperkt aantal gevallen; door verschillende startwaarden te gebruiken werd ook hier telkens het minimum gevonden.

Tabel 4 geeft de optimale oplossing voor $n = 2$ en $n = 5$ en voor diverse waarden voor q.

TABEL 4

Normaal verdeelde vraag

q	opt. assortiment ($n = 2$)	opt. assortiment ($n = 5$)
1	7.755 ; 8.987	7.551 ; 8.722 ; 9.651 ; 10.513 ; 11.397
5	10.111 ; 12.737	8.301 ; 9.723 ; 10.975 ; 12.341 ; 14.251
10	10.542 ; 13.698	8.420 ; 9.892 ; 11.215 ; 12.721 ; 15.062
20	10.845 ; 14.482	8.500 ; 10.005 ; 11.381 ; 12.998 ; 15.741
100	11.302 ; 15.903	8.612 ; 10.168 ; 11.624 ; 13.425 ; 17.007
500	11.594 ; 17.015	8.680 ; 10.264 ; 11.772 ; 13.661 ; 18.022

Hieruit kan geconcludeerd worden dat het eendimensioneel deterministisch assortimentsprobleem, zowel discreet als continu, zeer efficiënt oplosbaar is met bestaande algoritmen en software. Uitbreiding naar het stochastisch geval geeft echter heel wat moeilijkheden. Bovendien heeft een stochastische vraag eerder zin bij een meerperioden probleem. Een stochastische vraag impliceert immers automatisch voorraadvorming en/of tekorten en deze elementen kunnen slechts in het model opgenomen worden indien dit meerdere perioden bestrijkt. Pentico (1974) formuleert toch het éénperiode probleem met stochastische vraag maar heeft bovendien nog een aantal onrealistische veronderstellingen nodig om het probleem te kunnen oplossen.

III. HET DETERMINISTISCH TWEEDIMENSIONEEL PROBLEEM.

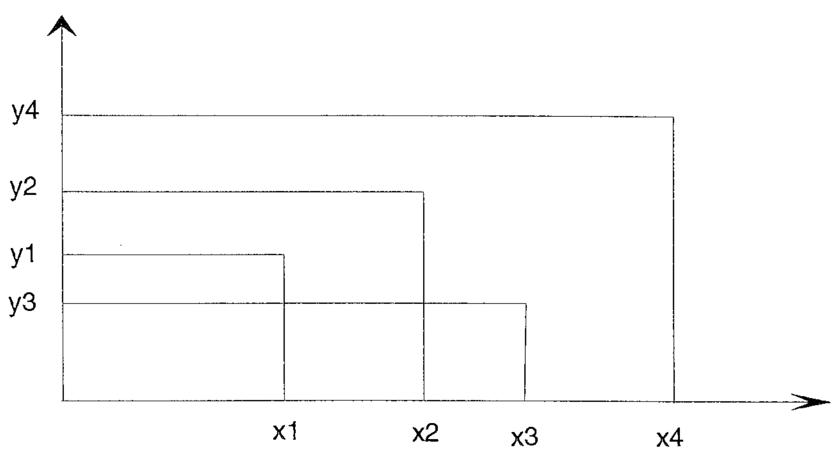
Bij het tweedimensioneel assortimentsprobleem wordt de keuze van de standaardmaten bepaald door twee attributen die x en y zullen genoemd worden. Geconfronteerd met een vraag naar een produkt, discreet of continu in x en y, worden de standaardmaten $(s_1,t_1), (s_2,t_2)... (s_n,t_n)$ gezocht waaruit de vraag (gedeeltelijk) kan worden voldaan en waarbij de kosten, voornamelijk substitutiekosten, worden geminimaliseerd. Een ernstige moeilijkheid voor het ontwikkelen van eenvoudige oplossingsprocedures is een gevolg van het niet *ordinaal* kunnen rangschikken van de gevraagde maten. Hierdoor is het niet meer mogelijk de vraag naar een eerder gerangschikt produkt te voldoen via een later gerangschikt produkt. Beschouw bijvoorbeeld rechthoekige platen met attributen *lengte* en *breedte* waarbij de vraag naar een plaat met *(lengte,breedte)* = *(l,b)* kan voldaan worden uit standaardplaten met afmetingen (l_s,b_s) indien de voorwaarden $l \leq l_s$ én $b \leq b_s$ vervuld zijn. Voor platen met afmetingen (6,1), (4,3), (3,2) is een rangschikking mogelijk tussen (4,3) en (3,2) maar niet tussen (6,1) en (4,3) of (6,1) en (3,2).

A. *Discrete vraag*

Van een produkt met attributen x en y worden de maten $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\ldots(x_N,y_N)$ gevraagd in aantallen $g_1,g_2,\ldots g_N$. Een belangrijke vraag is of de keuze van de standaardmaten ook hier moet beperkt blijven tot een keuze uit de gevraagde maten (x_i,y_i), $i = 1\ldots N$. Om het probleem duidelijk te stellen, geeft Figuur 8 een grafische voorstelling van vier gevraagde maten waarbij 2 standaardmaten moeten bepaald worden.

FIGUUR 8

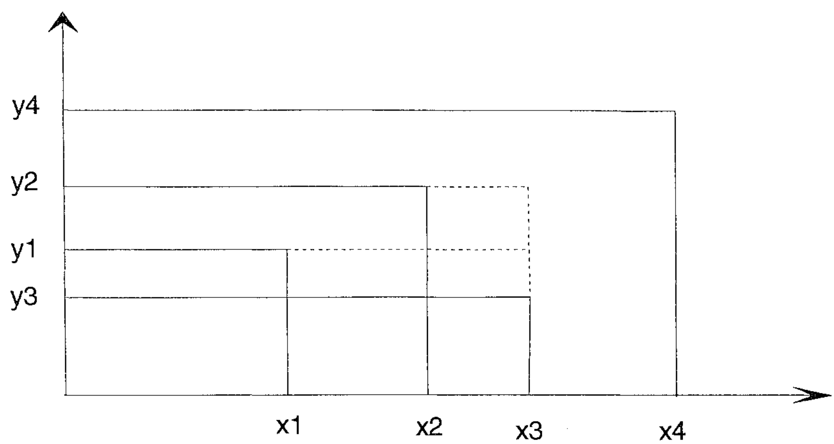
Vraag naat maten (x,y)



Om vraag (x,y) te voldoen uit standaardmaat (s,t) moet $x \leq s$ en $y \leq t$. Duidelijk is dan dat één van beide standaardmaten (x_4,y_4) zal zijn. Voor de tweede standaardmaat kan men zich beperken tot een keuze uit de drie resterende gevraagde maten maar het is wellicht nuttig bijkomende maten te voorzien zoals bijvoorbeeld aangegeven wordt in Figuur 9. Standaardmaat (x_3,y_1) kan de vraag naar (x_1,y_1) en (x_3,y_3) voldoen terwijl (x_3,y_2) bijkomend ook de gevraagde eenheden van maat (x_2,y_2) kan voldoen. Deze bijkomende maten zijn nuttig in het geval de attributen bijvoorbeeld lengte en breedte van rechthoeken zijn en de substitutiekost functie is van het verschil in oppervlakte tussen standaardmaat en gevraagde maat. Voor een meer uitvoerige behandeling van dit probleem en een praktische toepassing wordt verwezen naar Gochet en Vandebroek (1989).

FIGUUR 9

Uitgebreid aanbod standaardmaten



Voor de eenvoud van notatie wordt een gevraagde maat (x_i,y_i) kort genoteerd als v_i, $i \epsilon V = \{1,2...N\}$ terwijl w_j, $j \epsilon E = \{1,2...T\}$, de verzameling is van maten waaruit de standaardmaten kunnen gekozen worden. De substitutiekost kan nu, zoals in het eendimensioneel geval, voorgesteld worden door $\varphi(v_i,w_j)$.

Een geheeltallig lineair programma, volledig analoog met het eendimensioneel geval, ziet er dan uit als volgt:

$$\min_{\alpha_{ij},\beta_j} \quad \sum_{i\in V}\sum_{j\in E} \varphi(v_i, w_j)\; g_i\; \alpha_{ij} \tag{24}$$

$$\text{met} \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1 \qquad i \in V \tag{25}$$

$$\alpha_{ij} \leq \beta_j \qquad i \in V, j \in E \tag{26}$$

$$\sum_{j\in V} \beta_j \leq n \tag{27}$$

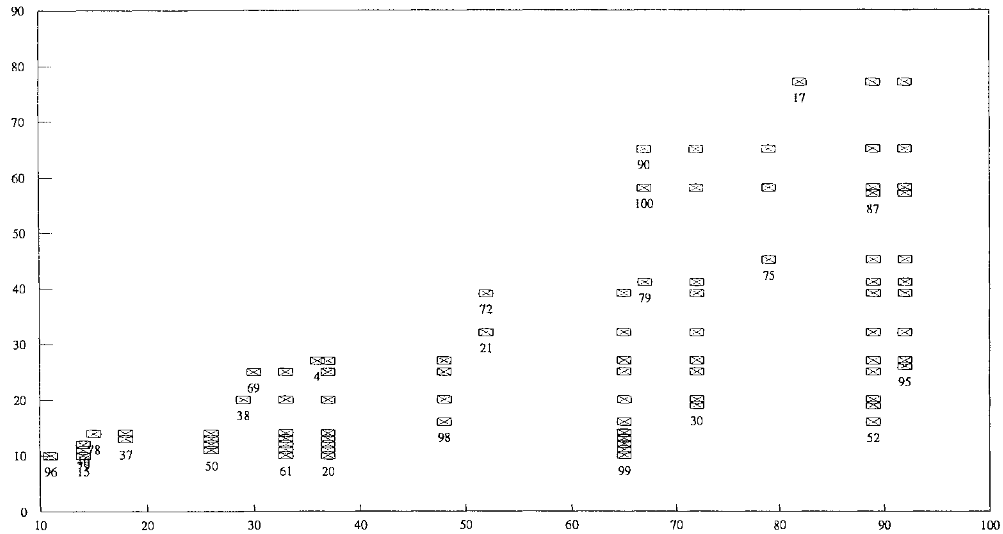
$$\alpha_{ij}, \beta_j \;\; \text{binair} \tag{28}$$

In het geval maat v_i niet kan voldaan worden door standaardmaat w_j kan $\varphi(v_i, w_j)$ zeer groot gekozen worden of, beter nog, de variabele φ_{ij} niet opgenomen worden in het model. Alle bedenkingen die bij het eendimensioneel formulering geuit werden, zijn ook hier van toepassing. Zeker geldt ook hier dat dit model slechts bruikbaar is voor problemen met een beperkt aantal verschillende maten in de verzamelingen V en E.

Dit model wordt geïllustreerd aan de hand van 2 voorbeelden. In Figuur 10 worden 25 maten voorgesteld die gegenereerd werden met lengte tussen 10 en 100 en breedte tussen 10 en 80. De getallen onder de rechthoekjes verwijzen naar de vraag g_i terwijl de rechthoekjes zonder getal de bijkomende maten zijn die de verzameling E uitmaken. E bevat hier 85 maten waaruit de standaardmaten kunnen gekozen worden. Figuur 11 is analoog maar hier werd er een sterke positieve correlatie opgelegd tussen de lengte en de breedte van een gevraagde maat. Ook in dit geval is $N = 25$ maar de verzameling E bevat hier slechts 37 verschillende maten. Figuren 12 en 13 geven dezelfde rechthoeken als de Figuren 10 en 11 maar nu werd aan de rechthoeken een volgnummer toegekend om de resultaten op een eenvoudige manier te kunnen rapporteren.

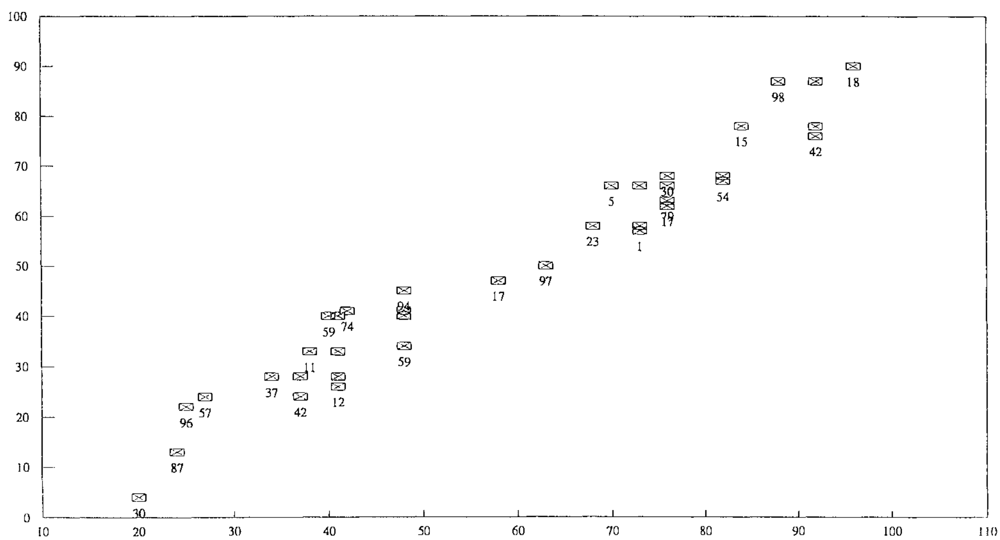
FIGUUR 10

Mogelijke staandaardmaten; N = 25, T = 85



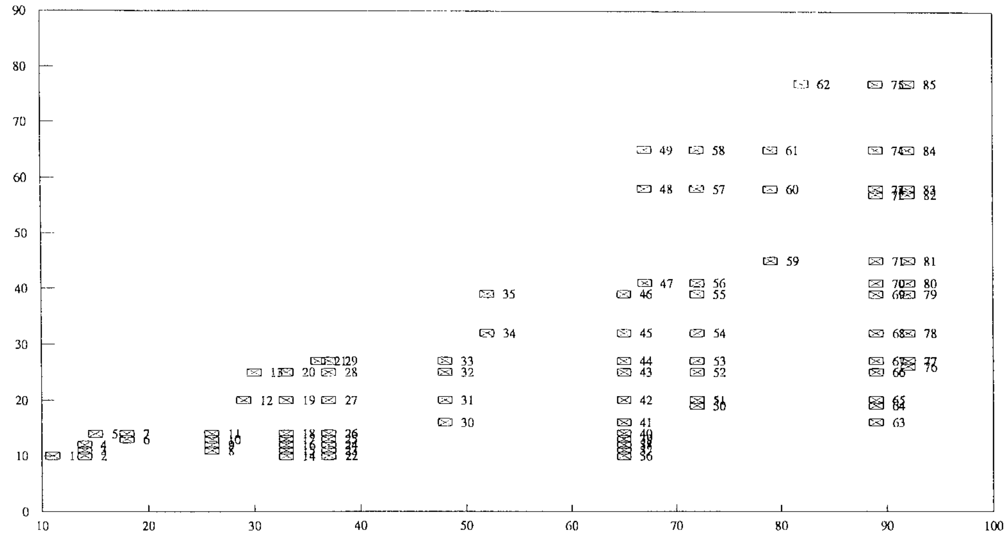
FIGUUR 11

Mogelijke standaardmaten; N =25, T = 37,
sterke positieve correlatie



FIGUUR 12

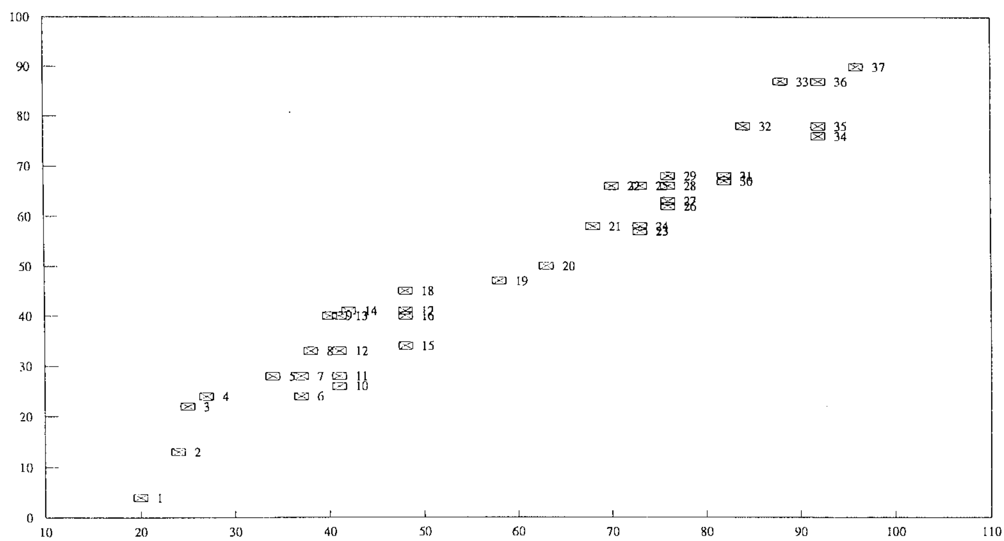
Mogelijke standaardmaten; $N = 25$, $T = 85$



FIGUUR 13

Mogelijke standaardmaten; $N = 25$, $T = 37$,

sterke positieve correlatie



Tabel 5 geeft de resultaten voor het voorbeeld met 85 maten waarbij het aantal toegelaten standaardmaten varieert van $n = 1$ tot $n = 10$. Telkens werd de sterke vorm van de LP-relaxatie opgelost en enkel voor $n = 9$ was de LP-oplossing fractioneel. Eén vertakking in een vertak-en begrensmethode volstond om de geheeltallige oplossing te vinden. Op dezelfde wijze worden de resultaten van het probleem met gecorreleerde attributen weergegeven in Tabel 6. Alle LP-relaxaties gaven geheeltallige oplossingen in dit voorbeeld.

TABEL 5

LP-oplossing, N = 25, T = 85

n	substitutiekost LP-relaxatie	substitutiekost geheeltallig	optimaal assortiment
1	7822313	7822313	85
2	3318782	3318782	75 ; 76
3	2256803	2256803	41 ; 75 ; 81
4	1511314	1511314	30 ; 49 ; 75 ; 76
5	1123164	1123164	30 ; 49 ; 59 ; 75 ; 76
6	855632	855632	13 ; 41 ; 49 ; 59 ; 75 ; 76
7	663251	663251	13 ; 41 ; 47 ; 49 ; 62 ; 72 ; 76
8	502053	502053	7 ; 20 ; 41 ; 47 ; 49 ; 62 ; 72 ; 76
9	382099.7	382292	7 ; 20 ; 35 ; 41 ; 49 ; 59 ; 62 ; 72 ; 76
10	286776	286776	7 ; 13 ; 30 ; 35 ; 36 ; 49 ; 59 ; 62 ; 72 ; 76

TABEL 6

LP-oplossing, N = 25, T = 37

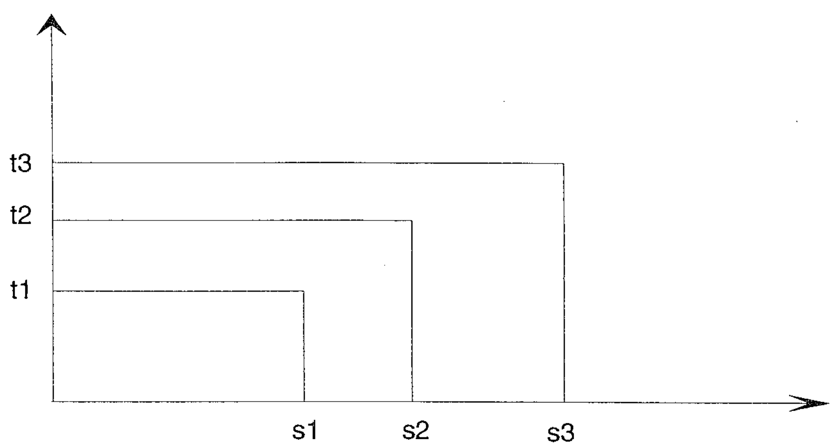
n	substitutiekost LP-relaxatie = geheeltallig	optimaal assortiment
1	6553329	37
2	2289489	18 ; 37
3	1299817	18 ; 31 ; 37
4	891577	4 ; 18 ; 31 ; 37
5	615013	4 ; 18 ; 20 ; 31 ; 37
6	503821	4 ; 18 ; 20 ; 31 ; 33 ; 37
7	400891	4 ; 14 ; 18 ; 20 ; 31 ; 33 ; 37
8	306331	4 ; 14 ; 18 ; 20 ; 27 ; 31 ; 33 ; 37
9	237115	4 ; 14 ; 18 ; 20 ; 27 ; 31 ; 33 ; 34 ; 37
10	182921	4 ; 7 ; 14 ; 18 ; 20 ; 27 ; 31 ; 33 ; 34 ;37

Meer efficiënte formuleringen gebaseerd op dynamische programmering zoals voor het ééndimensioneel geval zijn niet voor de hand liggend. Dit is een gevolg van het hoger aangehaalde probleem dat de maten niet ordinaal te rangschikken zijn. In sommige gevallen mag verondersteld worden dat de optimale keuze van de standaardmaten *geordend* zal zijn. Hiermee wordt een verzameling standaardmaten $w_1 = (s_1,t_1), w_2 = (s_2,t_2),\ldots w_n = (s_n,t_n)$ bedoeld waarvoor geldt dat $s_1 \leq s_2 \leq s_3..\leq s_n$ en $t_1 \leq t_2 \leq t_3..\leq t_n$. Een dergelijke verzameling maten wordt geïllustreerd in Figuur 14. Hoewel men nooit a priori zeker kan zijn dat een optimale keuze van standaardmaten geordend zal zijn, is deze veronderstelling redelijk indien aan volgende twee voorwaarden voldaan is

- de correlatie tussen beide attributen is sterk positief
- het aantal te kiezen standaardmaten n in (zeer) klein in vergelijking met het aantal gevraagde maten N.

FIGUUR 14

Een geordende verzameling standaardmaten



Voor een toepassing waarbij aan deze 2 voorwaarden voldaan is, wordt verwezen naar Diegel en Bocker (1984).

Het voordeel van geordende standaardmaten is dat opnieuw een efficiënte formulering op basis van dynamische programmering mogelijk wordt. Deze formulering gebruikt de uitgebreide verzameling

$E = \{w_1, w_2 ... w_T\}$ met $g_i = 0$ indien w_i een maat is waarvoor er geen vraag is, zie bijvoorbeeld (x_3, y_1) en (x_3, y_2) in Figuur 9.

Er wordt verondersteld dat E gerangschikt is zodanig dat $s_1 \leq s_2 \leq ... s_T$ en $t_i \leq t_{i+1}$ indien $s_i = s_{1+1}$. Toegepast op de rechthoeken uit Figuur 9 geeft dit

$$E = \{w_1 = (x_1, y_1), w_2 = (x_2, y_2), w_3 = (x_3, y_3), \\ w_4 = (x_3, y_1), w_5 = (x_3, y_2), w_6 = (x_3, y_4)\}$$

Laat verder

$$\Omega(w_i) = \{w_j \in E : s_j \leq s_i \text{ en } t_j \leq t_i\} \text{ en } \Omega(w_i, w_j) = \Omega(w_i) \backslash \Omega(w_j).$$

In Figuur 9 is $\Omega(w_4) = \{w_1, w_3, w_4\}$ en $\Omega(w_4, w_3) = \{w_1, w_4\}$. Stel tenslotte $\Phi_z(w_i)$: de minimale kost om de vraag te voldoen van alle eenheden in $\Omega(w_i)$ indien z standaardmaten worden toegestaan. Indien enkel substitutiekosten worden beschouwd, dan geldt:

$$\Phi_z(w_i) = \min_{w_j \in \Omega(w_i)} \left\{ \Phi_{z-1}(w_j) + \sum_{k \in \Omega(w_i, w_j)} \varphi(w_k, w_i)\, g_k \right\} \tag{29}$$

Deze recursieformule wordt berekend in de volgorde

$$\Phi_1(w_1), \Phi_1(w_2), \ldots \Phi_1(w_T), \Phi_2(w_2),\ \Phi_2(w_3), \ldots\ \Phi_n(w_T)$$

waarbij

$$\Phi_1(w_i) = \sum_{k \in \Omega(w_i)} \varphi(w_k, w_i)\, g_k, \quad i = 1, \ldots T. \tag{30}$$

Indien de waarde van n niet a priori wordt bepaald en bijvoorbeeld een vaste kost per bijkomende standaardmaat wordt opgelegd, dan is $\Phi(w_i)$: de minimale kost om de vraag te voldoen van alle eenheden in $\Omega(w_i)$:

$$\Phi(w_i) = \\ \min_{w_j \in \Omega(w_i), j \neq i} \left\{ c + \Phi(w_j) + \sum_{k \in \Omega(w_i, w_j)} \varphi(w_k, w_i)\, g_k \ ;\ c + \sum_{k \in \Omega(w_i)} \varphi(w_k, w_i)\, g_k \right\} \tag{31}$$

De berekeningen gebeuren in de volgorde $w_1, w_2, ... w_T$.

Bovenstaande voorbeelden met 85, respectievelijk 37, maten in de uitgebreide verzameling werden opgelost onder de beperking van een geordende keuze van standaardmaten. De resultaten zijn te vinden in Tabel 7 en Tabel 8; deze resultaten werden bekomen m.b.v. een pascal-programma. De kolom *% verschil* geeft het procentueel verschil t.o.v. de optimale oplossing die in Tabel 5 en Tabel 6 werd weergegeven. Zoals intuïtief kan verwacht worden, neemt over het algemeen het procentueel verschil toe met toenemende waarden van n: voor (zeer) kleine verhoudingen n/N zal de beperking van een geordende keuze van de standaardmaten procentueel geen al te grote afwijkingen geven van een optimale keuze zonder beperkingen. Dit is nog meer het geval indien de attributen positief gecorreleerd zijn.

TABEL 7

Geordende standaardmaten, $N = 25$, $T = 85$

n	kost	%verschil	geordende standaardmaten
1	7822313	0%	85
2	3444677	4%	76 ; 85
3	2324717	3%	41 ; 81 ; 85
4	1785853	18%	30 ; 76 ; 83 ; 85
5	1485657	32%	30 ; 76 ; 81 ; 83 ; 85
6	1248461	46%	7 ; 41 ; 76 ; 81 ; 83 ; 85
7	1149101	73%	7 ; 41 ; 76 ; 81 ; 83 ; 84 ; 85
8	1061677	111%	7 ; 30 ; 51 ; 76 ; 81 ; 83 ; 84 ; 85
9	996564	161%	5 ; 26 ; 41 ; 43 ; 76 ; 81 ; 83 ; 84 ; 85
10	931796	225%	5 ; 26 ; 41 ; 43 ; 76 ; 80 ; 81 ; 83 ; 84 ; 85

De resultaten voor de gegevens met sterk gecorreleerde lengten en breedten volgen dan in Tabel 8. Merk op dat voor $n = 1,2...8$ toch de optimale oplossing bekomen werd ondanks de beperking van geordende standaardmaten aangezien ook de optimale oplossing geordend was.

Indien de veronderstelling van een geordende verzameling standaardmaten niet verantwoord is en het probleem te groot is voor de lineaire programmeringsbenadering, dan is een heuristische methode wenselijk. Voorbeelden hiervan zijn te vinden in Page (1975) en Gochet en Vandebroek (1989), waar heuristieken worden voorgesteld die gebaseerd zijn op dynamische programmering.

Indien de standaardmaten kunnen versneden worden in verschillende kleinere maten moet het assortimentsprobleem gecombineerd worden met het versnijdingsprobleem. Hierover zijn volgende publikaties verschenen: Chambers en Dyson (1976), Diegel en Bocker (1984), Beasley (1985), Yanasse et al. (1991), Agrawal (1993) en Vasko en Wolf (1994). De hierin voorgestelde benaderingen zijn enkel bruikbaar voor kleinere problemen met uitzondering van de benadering voorgesteld in laatstvernoemde publikatie.

TABEL 8

Geordende standaardmaten, N = 25, T = 37

n	kost	%verschil	geordende standaardmaten
1	6553329	0%	37
2	2289489	0%	18 ; 37
3	1299817	0%	18 ; 31 ; 37
4	891577	0%	4 ; 18 ; 31 ; 37
5	615013	0%	4 ; 18 ; 20 ; 31 ; 37
6	503821	0%	4 ; 18 ; 20 ; 31 ; 33 ; 37
7	400891	0%	4 ; 14 ; 18 ; 20 ; 31 ; 33 ; 37
8	306331	0%	4 ; 14 ; 18 ; 20 ; 27 ; 31 ; 33 ; 37
9	252137	6%	4 ; 7 ; 14 ; 18 ; 20 ; 27 ; 31 ; 33 ; 37
10	212825	16%	2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 18 ; 20 ; 27 ; 31 ; 33 ; 37

B. *Continue vraag*

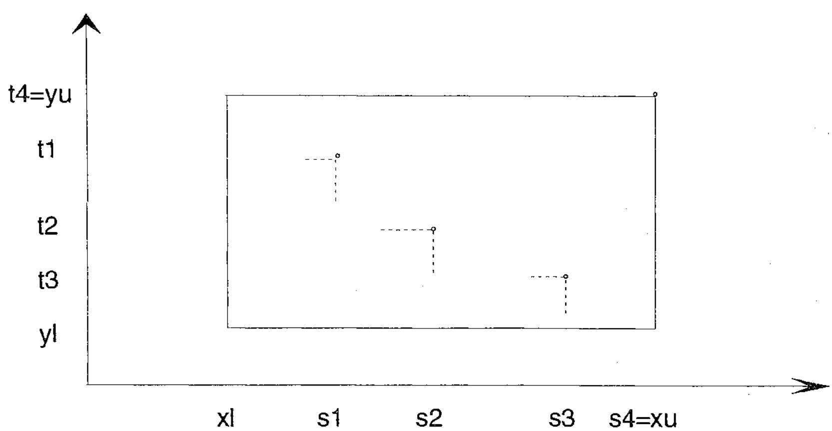
Een continue vraag over twee attributen vereist een functie f(x,y) met f(x,y) ≥ 0 en

$$\int_{x_l}^{x_u} \int_{y_l}^{y_u} f(x,y)\, dy\, dx = 1. \tag{32}$$

Beide attributen x en y kunnen op een intervalschaal worden gemeten waarbij attribuut x in waarde kan variëren tussen x_l en x_u, attribuut y tussen y_l en y_u. De proportie van de totale vraag met $x_l \leq x_a \leq x \leq x_b \leq x_u$ en $y_l \leq y_a \leq y \leq y_b \leq y_u$ is $\int_{x_a}^{x_b} \int_{y_a}^{y_b} f(x,y)\, dy\, dx$. In de meeste toepassingen zal de vraag dusdanig zijn dat de attributen x en y gecorreleerd zijn. Bivariaat normale, lognormale en beta-verdelingen kunnen hierbij gebruikt worden. De grote moeilijkheid bij deze problemen ligt echter in het uitschrijven van de gemiddelde substitutiekost per gevraagde eenheid, althans indien geen veronderstelling wordt gemaakt omtrent de aard van de optimale standaardmaten. Om dit te illustreren wordt in Figuur 15 een vraag ondersteld met $x_l \leq x \leq x_u$ en $y_l \leq y \leq y_u$ zonder verdere specificatie van $f(x,y)$. Voor de vier standaardmaten (s_1,t_1), (s_2,t_2), (s_3,t_3), $(s_4,t_4) = (x_u,y_u)$ is het vrij ingewikkeld om de dubbele integralen van de substitutiekost neer te schrijven en het is duidelijk dat dit quasi onmogelijk wordt indien a priori niets geweten is over de ligging van de standaardmaten.

FIGUUR 15

Continue vraag met vier standaardmaten



Indien bijkomende voorwaarden worden opgelegd, bijvoorbeeld een geordende keuze, dan wordt continue optimizatie wel mogelijk.

Veronderstel dat de geordende maten (s_1,t_1), $(s_2,t_2)\ldots(s_n,t_n)$ worden gezocht met substitutiekosten van de vorm

$$\varphi[(x,y),(s_i,t_i)] \quad \text{voor} \quad s_{i-1} < x \leq s_i \quad \text{en} \quad y \leq t_i \tag{33}$$

$$\text{of} \quad t_{i-1} < y \leq t_i \quad \text{en} \quad x \leq s_i \tag{34}$$

In dit geval kan de gemiddelde substitutiekost per eenheid geschreven worden als

$$
\begin{aligned}
GSK \;=\; & \sum_{k=1}^{n} \int_{s_{k-1}}^{s_k} \int_{y_l}^{y_k} \varphi[(x,y),(s_k,t_k)]\; f(x,y)\; dy\; dx \\
+ & \sum_{k=1}^{n} \int_{x_l}^{s_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi[(x,y),(s_k,t_k)]\; f(x,y)\; dy\; dx
\end{aligned}
\tag{35}
$$

met $s_0 = x_l, s_n = x_u, t_0 = y_l$ en $t_n = y_u$. Het minimaliseren van GSK is in dit geval uiteraard complexer dan in het ééndimensioneel geval en specifieke software zal vermoedelijk vereist zijn voor het efficiënt oplossen van dit probleem.

Wellicht is het aangewezen, zeker als de veronderstelling van geordende standaardmaten niet redelijk is, om het continue probleem discreet te benaderen en de methoden uit vorige paragraaf toe te passen.

IV. BESLUIT

De één- en tweedimensionele discrete assortimentsproblemen kunnen optimaal opgelost worden via geheeltallige lineaire programmering indien het aantal beschouwde maten niet te groot is. Grote problemen kunnen meestal efficiënt opgelost worden via dynamische programmering. Hiervoor moet de substitutiekost wel aan bepaalde voorwaarden voldoen en moeten, voor het tweedimensionele probleem, bijkomende veronderstellingen worden gemaakt over de gewenste politiek. Zo werd er aangetoond hoe de optimale verzameling van geordende standaardmaten eenvoudig kan bepaald worden m.b.v. dynamische programmering.

Indien de vraag continu is, moet een stelsel van niet-lineaire vergelijkingen worden opgelost om de optimale standaardmaten te bepalen. Hier is het mogelijk dat suboptimale oplossingen worden bekomen doordat meerdere oplossingen van het stelsel mogelijk zijn. Vooral bij deze problemen zal de software die voorhanden is om dergelijke stelsels op te lossen grenzen opleggen aan de maximale grootte van het probleem.

REFERENTIES

Agrawal, P., 1993, Determining Stock-Sheet-Sizes to Minimize Trim Loss, *European Journal of Operational Research* 64, 423-431.

Beasley, J., 1985, An algorithm for the Two-Dimensional Assortment Problem, *European Journal of Operational Research* 19, 253-261.

Chambers, M. and Dyson, R., 1976, The Cutting Stock Problem in the Flat Glass Industry - Selection of Stock Sizes, *Operational Research Quarterly* 27, 949-957.

Diegel, A. and Bocker, H., 1984, Optimal Dimensions of Virgin Stock in Cutting Glass to Order, *Decision Sciences* 15, 260-274.

Frank, C.,1965, A Note on the Assortment Problem, *Management Science* 11, 724-726.

Gochet, W. and Vandebroek, M., 1989, A Dynamic Programming Based Heuristic for Industrial Buying of Cardboard, *European Journal of Operational Research* 38, 104-112.

Hinxman, A., 1980, The Trim-Loss and Assortment Problem: a Survey, *European Journal of Operational Research* 5, 8-118.

Page, E., 1975, A Note on a Two-Dimensional Dynamic Programming Problem, *Operational Research Quarterly* 26, 321-324.

Pentico, D.W., 1974, The Assortment Problem with Probabilistic Demand, *Management Science* 21, 286-290.

Pentico, D.W., 1988, The Discrete Two-Dimensional Assortment Problem, *Operations Research* 36, 324-332.

Sadowski, W., 1959, A Few Remarks on the Assortment Problem, *Management Science* 6, 13-24.

Vasko, F.and Wolf, F., 1994, A Practical Approach for Determining Rectangular Stock Sizes, *Journal of the Operational Research Society* 45, 281-286.

Wolfson, M., 1965, Selecting the Best Lengths to Stock, *Operations Research* 13, 570-585.

Yanasse, H., Zinober, A. and Harris, R., 1991, Two-Dimensional Cutting Stock with Multiple Stock Sizes, *Journal of the Operational Research Society* 42, 673-683.